

# 1 Construction de machines de Turing à 1 bande

## Exercice 1

(a)  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

On construit  $M = (Q', \Sigma, \delta', \Gamma, q_0, q_{OK}, q_{KO})$

$$Q' = Q \cup \{q_{OK}, q_{KO}\}$$

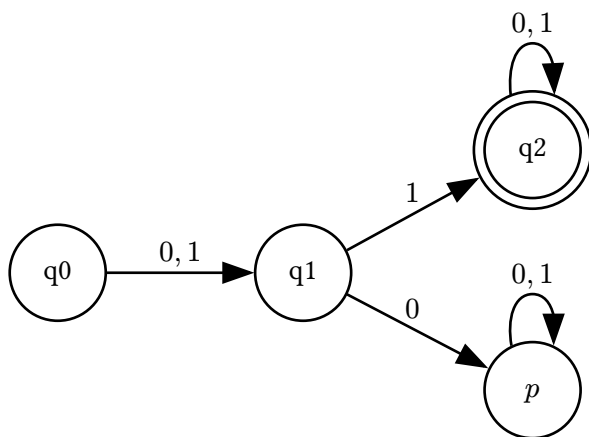
$$\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$$

$$\delta'(q, x) = (q', x, R), \forall (q, x, q') \in Q \times \Sigma \times Q, \delta(q, x) = q'$$

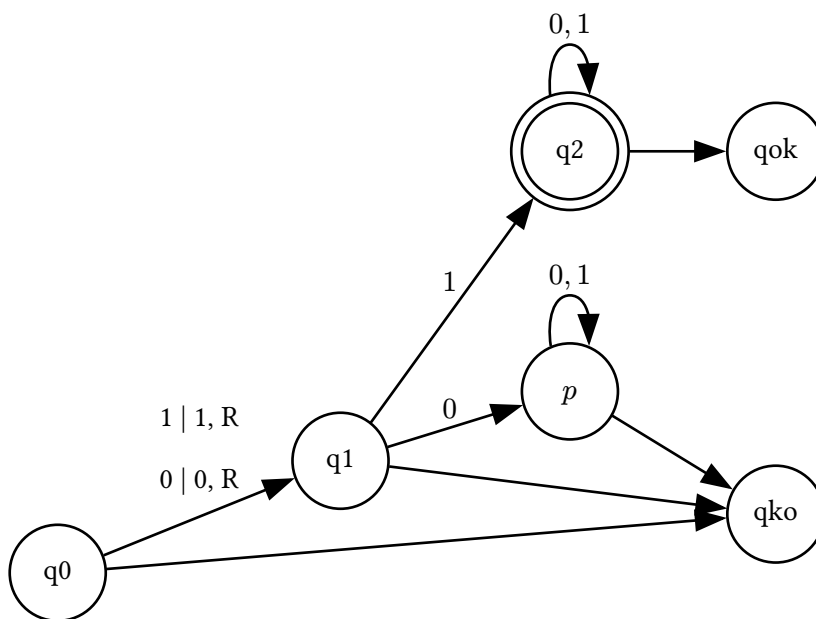
$$\delta'(q, \sqcup) = (q_{OK}, \sqcup, L) \text{ si } q \in F$$

$$\delta'(q, \sqcup) = (q_{KO}, \sqcup, L) \text{ si } q \notin F$$

(b)

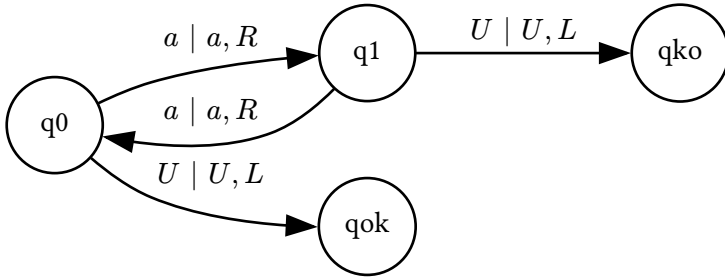
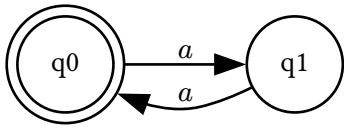


à finir



## Exercice 2

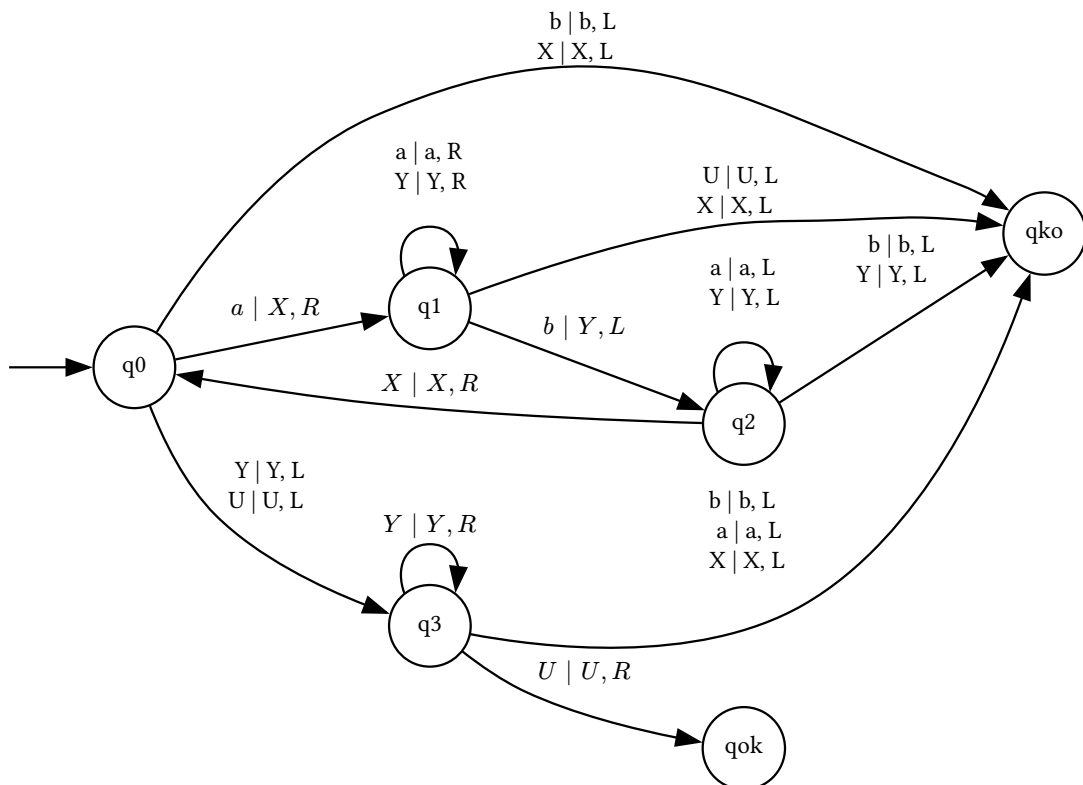
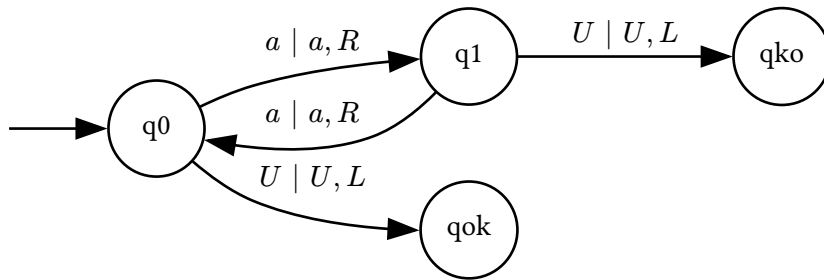
$L = \{aa\}^*$



### Exercice 3

(a) Idée: va et vient sur la bande

1. Remplacer le premier "a" par X
2. Aller à droite jusqu'à obtenir un "b" et le remplacer par Y
3. Repartir en arrière pour trouver le premier "a" non coché

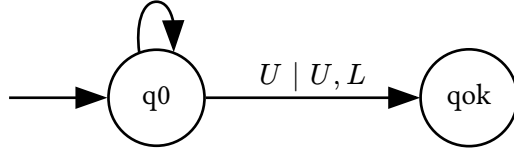


### Exercise 4

(a)

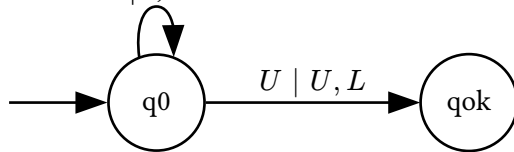
### Exercise 5

forall a in Sigma, a | U, R



### Exercise 6

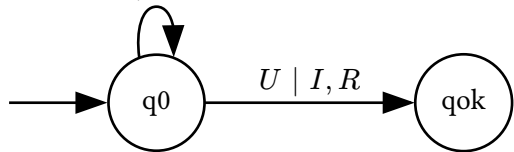
a | b, R  
b | a, R



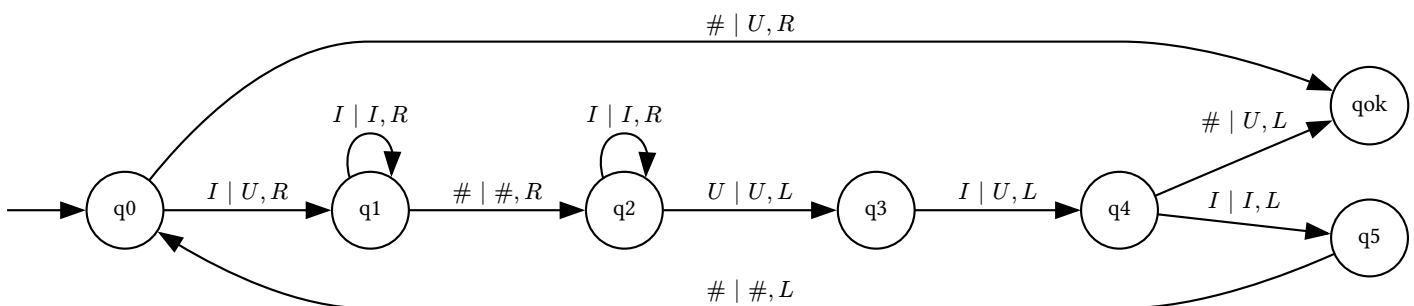
### Exercise 7

(a)

I | I, R



(b)



## Exercice 8

## 2 Construction de machines de Turing multi-bandes

### Exercice 9

### Exercice 10

### Exercice 11

### Exercice 12

#### Preuve

Comme  $L_1, L_2$  sont RE, il existe deux machines de Turing  $M_1$  et  $M_2$  telles que  $\mathcal{L}(M_1) = L_1$  et  $\mathcal{L}(M_2) = L_2$ . On construit une machine de Turing  $M$  sur une entrée  $w$ :

$M$  simule une étape de  $M_1$  sur  $w$  sur la bande  $B_1$ , puis une étape de  $M_2$  sur  $w$  sur la bande  $B_2$ , et ainsi de suite.  $M$  accepte si  $M_1$  ou  $M_2$  accepte.

Montrons que  $L_1, L_2 \in \text{RE}$  alors  $L_1 \cup L_2 \in \text{RE}$

MQ si  $M$  accepte  $w$ , alors  $w \in L_1 \cup L_2$ . Si  $M$  accepte, c'est que  $M_1$  ou  $M_2$  accepte. Donc  $w \in L_1$  ou  $w \in L_2$ .

Conclusion:  $\mathcal{M} = L_1 \cup L_2$

### Exercice 13

Langage fini  $\Rightarrow$  automate fini  $\Rightarrow$  complet et déterministe  $\Rightarrow$  MT qui s'arrête sur toutes ses entrées, cf exo 1

Soit  $L \in \text{RE}$  tel que  $L \notin R$ . Mq pour toute MT  $M$  qui accepte  $L$  il existe une infinité de mots d'entrée sur lesquels la machine ne s'arrête pas.

Soit  $M$  une MT acceptant  $L$  et  $D$  l'ensemble des mots sur lesquels  $M$  ne s'arrête pas.

Par l'absurde, supposons  $D$  fini. Alors il existe une machine de Turing  $M_D$  qui s'arrête sur toutes ses entrées et qui accepte exactement les mots de  $D$  (Les langages finis sont récurrents.)

$M'$  commence par exécuter  $M_D$  sur son mot d'entrée  $w$ .

- Si  $M_D$  accepte cad  $M'$  rejette le mot.
- Sinon  $M'$  exécute  $M$  sur  $w$  et répond comme  $M$ .

Mq  $M'$  s'arrête sur toutes ses entrées.

Soit  $w$  un mot d'entrée.  $M_D$  s'arrête sur  $w$ . Si  $M_D$  accepte,  $M'$  s'arrête et rejette. Si  $M_D$  rejette, alors  $w \notin D$  et s'arrête sur  $w$ . Ainsi  $M'$  aussi

Mq  $M'$  accepte  $L$

Soit  $w$  un mot d'entrée.

- Si  $w \in L$ , alors  $M$  s'arrête sur  $w$  et accepte donc  $w \notin D$ . Donc  $M_D$

rejette  $w$  et donc  $M'$  exécute  $M$  sur  $w$  et va accepter donc  $M'$  accepte aussi.

- Si  $w \notin L$ . Il y a 2 cas possible.
  1.  $M$  s'arrête sur  $w$  en rejetant. Dans ce cas  $w \notin D$  et donc  $M_D$  rejette  $w$  et  $M'$  va exécuter  $M$  sur  $w$  et  $M$  va rejeter dans  $M'$  aussi.
  2.  $M$  ne s'arrête pas sur  $w$ .  
Alors  $w \in D$ . Par conséquent,  $M_D$  accepte  $w$ . Donc  $M'$  rejette  $w$  (par construction de  $M'$ )

Dans tous les cas  $w \notin \mathcal{L}(M')$ . Finalement  $M'$  accepte  $L$ .

On a montré l'existence d'une MT  $M'$  qui s'arrête sur toutes ses entrées et qui accepte  $L$ , le langage  $L$  est donc récursif

Contradiction donc  $D$  ne peut pas être fini.

### Exercice 14

### Exercice 15

### Exercice 16 15

Soit  $S$  une MT qui énumère  $L$  en ordre lexicographique. On construit un MT  $M$  qui se comporte de la façon suivante:

Sur son entrée  $w$

1.  $M$  simule  $S$  sur sa bande de travail jusqu'à ce que  $S$  finisse d'écrire un mot  $v$
2.  $M$  compare  $v$  et  $w$ . Si ils sont égaux,  $M$  s'arrête en acceptant

- Si  $w < v$  selon l'ordre lexicographique,  $M$  s'arrête en rejetant
- Si  $w > v$  selon l'ordre lexicographique, on recommence à l'étape 1.

#### **M s'arrête toujours.**

L'ordre lexicographique étant un ordre total, il existe forcément un moment où  $v > w$  et  $M$  va s'arrêter.

**M accepte L.** Soit  $w \in L$ , alors  $w$  va un jour être énuméré par  $S$ . Comme  $S$  énumère en ordre lexicographique, tous les mots  $V$  qui seront énumérés avant seront tels que  $V < w$  et donc  $M$  ne sera pas arrêtée avant. Donc un jour  $S$  aura écrit  $w$  sur la bande et  $M$  accepte.

Si  $w \notin L$ . Alors  $S$  ne va jamais écrire  $w$  sur sa bande et  $M$  n'acceptera pas  $w$

Donc  $L$  est récursif

$\Sigma^*$  ne peut pas être énuméré en ordre lexicographique car l'ordre lexicographique n'est pas fondé: il existe une suite infinie décroissante:

Exemple:  $\Sigma = \{a, b\}$

$$x_n = a^n b$$