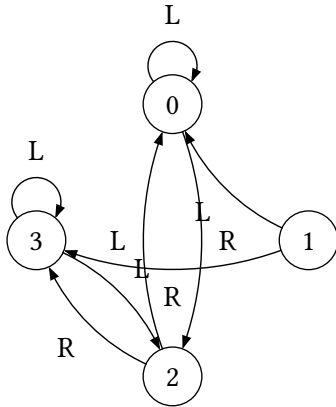


Exo 59

1)

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est processus statistique discret
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie propriété de Markov à l'ordre 1
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est homogène



3)

Théorème ergodique:

Chaîne ergodique:

- Irréductible
- Apériodique
- espace d'état fini + irréductible \Rightarrow récurrente positive

$$\Pi = \Pi P, \Pi = (\Pi_0, \dots, \Pi_3)$$

$$L(\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2) = \Pi_0$$

$$L\Pi_3 = \Pi_1$$

$$R\Pi_0 = \Pi_2$$

$$R(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) = \Pi_3$$

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$$

Résolution: substitution i, ii, iii

$$i : L(\Pi_0 + L\Pi_3 + R\Pi_0) = \Pi_0$$

$$\Pi_3 = \frac{1-L(R+1)}{L^2} \Pi_0$$

$$v : \Pi_0 + L \frac{1-L(R+1)}{L^2} \Pi_0 + R\Pi_0 + \frac{1-L(R+1)}{L^2} \Pi_0 = 1$$

$$\Pi_0 = \frac{L^2}{1-LR}$$

$$\Pi_1 = L \frac{R^2}{1-LR}$$

$$\Pi_2 = L^2 \frac{R}{1-LR}$$

$$\Pi_3 = \frac{R^2}{1-LR}$$

TODO Rajouter maths

Exo 61

1

$$\begin{array}{cccccccc}
) & p & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\
 p) & pq + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 & 0 & 0 & - \\
 & q(1-p) & pq + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 & 0 & - \\
 & 0 & q(1-p) & pq + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 & - \\
 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 - & 0 & q(1-p) & pq + (1-q)(1-p) & p(1-q) & 0 & 0 \\
 0 & - & 0 & q(1-p) & pq + (1-q)(1-p) & p(1-q) & p(1-q) \\
 0 & 0 & - & 0 & q(1-p) & pq + (1-q)(1-p) & pq + (1-q)(1-p) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & q
 \end{array}$$

2

- Apériodique : Stationnaire
- Irréductible : Il faut que $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$
- Espace état fini + irréductible \Rightarrow récurrence positive

3

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Système à résoudre

Remarque (qui ne sert pas pour cet exo)

$$\Pi_i^{(*)} = \frac{1}{M(i)}$$

4

$$\mathbb{E}(X_K) = \sum_{i=0}^3 i \Pi_i^{(*)}$$

TODO Remettre dans semaine 9

58

1

Oui, $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$

2

Choix simple est périodique de période 3.

Choix aléatoire a $3! = 6$ états.

TODO FINIR GRAPHE

bistochastique = symétrique

bistochastique \Leftrightarrow somme colonne = 1

si symétrique $\Pi = \Pi P \Pi$ est constant