Soit un système $\mathcal{S}$ possédant un nombre d'états finis.
On nomme $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ les états dans lesquels peut se retrouver S.
À chaque instant $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire décrivant l'état du système à cet instant n.

Processus stochastique:
Suite représentant une évolution discrète dans le temps

Propriété de Markov à l'ordre k:
Suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\mathbb{P}(X_n \mid X_1 \ldots X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n \mid X_{n-k} \ldots X_{n-1})$
En particulier à l'ordre 1: $\mathbb{P}(X_n \mid X_1 \ldots X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n \mid X_{n-1})$. ❦

Chaine de Markov: ❦
Processus stochastique vérifiant la propriété de Markov à l'ordre 1

Chaîne de Markov homogène:
Si vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_n \mid X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_1 \mid X_0)$$

Relation de communication:
On dit que deux états i j communiquent (noté $i \leftrightarrow j$) si i et accessible par j et si j est accessible par i.

Chaine irréductible: ❦
Une chaine est dite irréductible s'il n'existe qu'une seule classe pour la relation d'équivalence $\leftrightarrow$

Sous ensemble absorbant:
Un sous-ensemble d'états C ⊂ S est absorbant si et seulement :
- C est une sous-chaîne de Markov.
- C forme une chaîne de Markov irréductible.

Périodicité:
Un état est périodique si l'on peut y revenir en n > 1 sauts, de période le nombre minimal de sauts.
Une chaine est périodique si le PGCD des périodes est supérieur à 1.

Remarque: deux états communiquant ont même période

Temps de premier retour ❦**:**
On définit une nouvelle variable aléatoire $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \tau_i = \begin{cases} \inf\{k \geq 1 \mid X_k = i\} & \text{si } \{k \geq 1 \mid X_k = i\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

État récurrent ❦**:**
Un état i est récurrent si:

$$\mathbb{P}(\tau_i < +\infty) = 1$$

État transient ❦**:**
Un état i est transient si:

$$\mathbb{P}(\tau_i < +\infty) < 1$$

Proba de premier retour en i en n étapes

$$f_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}(\tau_i = n)$$

Temps moyen de retour en i:

$$M_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$$

Érgodicité

Chaine ergodique

Une chaine de Markov est dite ergodique ssi elle est:

- irréductible
- apériodique
- récurente positive

Théorème ergodique

Soit $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le vecteur représentant la probabilité de chaque état au moment $n \in \mathbb{N}$. Pour une chaine ergodique, π converge vers π^* et:

$$\begin{cases} \pi^* \cdot P & = \pi^* \\ \sum_{j=1}^{n} \pi^*_{1j} & = 1 \end{cases}$$

De plus,

$$\pi^*_{1j} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tau_i)}$$